

## BARYCENTRE

Le plan  $(P)$  et rapporté à un repère  $R(O; \vec{i}; \vec{j})$

### 1) Barycentre de deux points pondérés.

**1-1)** Soit  $A$  un point et  $\alpha$  un réel non nul ; le couple  $(A, \alpha)$  s'appelle un point pondéré.

Plusieurs points pondérés constituent un système pondéré

### 1-2) Barycentre de deux points pondérés.

a) Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré tel que  $\alpha + \beta \neq 0$  ; le barycentre du système pondéré  $\Sigma$  est le point  $G$  qui vérifie :  $\alpha \vec{AG} + \beta \vec{BG} = \vec{0}$

On écrit :  $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

### 1-3) Propriétés de barycentre

a) Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

b) Si  $\alpha = \beta$  le barycentre du système pondéré  $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  s'appelle l'isobarycentre de  $A$  et  $B$  qui n'est que le milieu du segment  $[AB]$ .

c) Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  un système pondéré, tel que :  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ . Pour tout point  $M$  du plan  $(P)$  on a :  $\vec{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{MB}$

ou  $(\alpha + \beta) \vec{MG} = \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB}$  Cette propriété s'appelle la propriété caractéristique du barycentre et on a :  $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$

d) Si  $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  alors les points  $A, B$  et  $G$  sont alignés.

e) Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  des points du plan

et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  on a :  $\vec{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{OB}$

et donc on a les coordonnées de  $G$  :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases}$$

### 2) Barycentre de trois points pondérés

**2-1)** Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Il existe un et un seul point  $G$  qui vérifie

$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$  Et s'appelle le barycentre du système pondéré  $\Sigma$

**2-2)** Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  si  $M$  est un point quelconque dans le plan  $(P)$

on a :  $\vec{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{MB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{MC}$

donc :  $(\alpha + \beta + \gamma) \vec{MG} = \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC}$

**2-3)** Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  et  $C(x_C; y_C)$  des points du plan

et  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

on a :  $\vec{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{OB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{OC}$

et donc les coordonnées de  $G$  :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases}$$

### 2-4) Propriétés :

a) Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul : pour  $k \neq 0$

$\text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$

b) La propriété d'associativité :

Si  $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  avec  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Alors :  $G = \text{Bar} \{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$

Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

c) **Cas particulier** : Si les poids  $\alpha; \beta$  et  $\gamma$  sont égaux le barycentre de  $\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha)\}$

S'appelle le **centre de gravité** du triangle  $ABC$ .

### d) Barycentre de quatre points pondérés

Soit  $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$  un système pondéré, tel que  $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ . Il existe un et un seul point  $G$  qui vérifie :  $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} + \delta \vec{GD} = \vec{0}$

Et si  $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

Et  $M$  est un point quelconque dans le plan  $(P)$

Alors on a :  $\vec{MG} = \frac{\alpha}{s} \vec{MA} + \frac{\beta}{s} \vec{MB} + \frac{\gamma}{s} \vec{MC} + \frac{\delta}{s} \vec{MD}$

où  $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

e) Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  et  $C(x_C; y_C)$  et  $D(x_D; y_D)$

des points du plan

Et si  $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

Alors : les coordonnées de  $G$  sont :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{s} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{s} \end{cases}$$

où  $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

f) Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre

g) Si  $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

Avec  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $\gamma + \delta \neq 0$  Si  $G' = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

Et  $G'' = \text{Bar} \{(C, \gamma); (D, \delta)\}$

Alors  $G = \text{Bar} \{(G', (\alpha + \beta)); (G'', (\gamma + \delta))\}$

